マックス型関数の連続性について

富山大学経済学部　白石俊輔

1　序

X, Yを距離空間、$F(x): X \rightrightarrows Y$を multifunction とする。$F$の（Berge の意味での）上半連続は次のように定義される。

定義 1 $F(x): X \rightrightarrows Y$　が点 x_0で上半連続 $\Leftrightarrow$
$\forall U$: *open with* $F(x_0) \subset U$, $\exists V(x_0)$: *neighbourhood of* x_0 *such that*

$$F(x) \subset U, forall x \in V(x_0)$$

今、関数 $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ に対して新たな関数 $S: X \to \bar{\mathbf{R}}$を

$$S(x) := \sup_{y \in F(x)} f(x, y)$$

によって定める。関数 S を max-function、あるいは marginal function と言う。調べたいのはこの関数の上半連続性である。標語的に

（$*$）f, Fともに上半連続であればSも上半連続である

となればウレシイのだけれどもそうは問屋がおろさぬ。

例 1 $X = \mathbf{R}_+, Y = \mathbf{R}, f(x, y) = xy$ とし、

$$F(x) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{if } x = 0 \\ [0, \frac{1}{x}] & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

とおく。このとき f, F はともに上半連続であるが

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

となって S は $x = 0$ において上半連続とはならない。

Multifunction F の上半連続性の定義にはいろいろなやりかたがあるが次のようなやや人工的な定義をしてやると標語（$*$）が生きてくる。

定義 2 $F(x): X \rightrightarrows Y$　が点 x_0で点列上半連続 $\Leftrightarrow$
$\forall x_n \to x_0, \forall y_n \in F(x_n)$, $\exists \{y_k\}$: *convergent subsequence of* $\{y_n\}$ *with* $\lim_{k \to \infty} y_k = y_0 \in F(x_0)$

註 1 点列上半連続という言葉は一般的なものではない。実際こんな定義は見たことがない。

定理 1 f は上半連続、F は点 x_0 で点列上半連続とする。このとき S は x_0 において上半連続となる。

証明：（福島 [3]）$S(x_0)=+\infty$ の時は明らかなので、$S(x_0)<+\infty$ と仮定する。今、$\{x_n\}$ を $x_n \to x_0$ なる任意の点列とする。このとき、$S(x_n)=+\infty$ となる x_n はたかだか有限個であることが分かる。実際、$S(x_n)=+\infty$ となる x_n が無限個あったとすると、これらの n に対して、

$$f(x_n, y_n) \geq n$$

となる $y_n \in F(x_n)$ が存在する。F の点列上半連続性により一般性を失うことなく $y_n \to y_0 \in F(x_0)$ としてよいが、この時 f の上半連続性から

$$+\infty = \limsup_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \leq f(x_0, y_0) \leq S(_0) < \infty$$

となり、不合理である。そこで一般性を失うことなくすべての n に対して $S(x_n)<+\infty$ と仮定する。

S の定義より、任意の $\epsilon>0$ に対して

$$f(x_n, y_n)+\epsilon > S(x_n)$$

を満たす $y_n \in F(x_n)$ が存在する。再び F の点列上半連続性により一般性を失うことなく $y_n \to y_0 \in F(x_0)$ としてよいのだが、この時 f の上半連続性から

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} S(x_n) &\leq \limsup_{n\to\infty} f(x_n, y_n)+\epsilon \\
&\leq f(x_0, y_0)+\epsilon \\
&\leq S(_0)+\epsilon
\end{aligned}$$

となる。$\epsilon>0$ が任意だったので Sの上半連続性が示された。□

F の点列上半連続性を保証するには F のある種のコンパクト性を仮定するのが普通である。

定理 2 *(Aubin [1])* $F(x_0)$ はコンパクトであるとする。この時 f と F がともに上半連続であれば、S は点 x_0 で上半連続である。

この定理から $F(x_0)$ のコンパクト性を取ることが出来ないのは例1から分かる。ところが maximand f がパラメータ x に依存しない場合は少しばかり事情が違ってくる。標語（*）がそのまま通用するのだ。いま、$f_0 : Y \to \mathbf{R}$ とし、

$$S_0(x) := \sup_{y\in F(x)} f_0(y)$$

とする。この時次が成り立つ。

定理 3 *(Bank et al [2] を見よ)* f_0 と F がともに上半連続であれば、S_0 は上半連続である。

これは Aubin の演習本 [1] の（難しいほうの）証明を見ながらやれば次のように簡単に示すことができるもので、general topology の演習には丁度良い。

定理 3 の証明：$x_0 \in X$ とし、勝手な $\epsilon>0$ をとる。f_0 は上半連続なのだから各 $y \in F(x_0)$ に対してそれらの近傍 $U(y)$ が存在し、

$$\forall u \in U(y),\quad f_0(u) \leq f_0(y)+\epsilon$$

となる。$U := \cup_{y\in F(x_0)} U(y)$ とおくと $F(x_0) \subset U$ だから F の上半連続性より、x_0 の近傍 $V(x_0)$ があって、

$$\forall x \in V(x_0) \qquad F(x) \subset U$$

となる。したがって、任意の $x \in V(x_0)$ と $u \in F(x)$ に対して、$y \in F(x_0)$ が存在して、$u \in U(y)$ となるのだから、

$$f_0(u) \le f_0(y) + \epsilon \le S_0(x_0) + \epsilon$$

がいえる。$u \in F(x)$ は任意なので結局、

$$\forall x \in V(x_0), \quad S_0(x) \le S_0(x_0) + \epsilon$$

となり、S_0 の上半連続性が示された。□

数学的に見る限りここまでの議論に何の問題もないし、「これでオシマイ」の話でもある。しかしなぜ maximand f がパラメータに依存するかしないかでこのような違いがでるのかその説明にはなっていない。見かけ上、maximand のパラメータ依存型問題と非依存型問題とでは、「お互いに変換が出来るのにもかかわらず」、なのだ。この変換は次のようにすればよい。

「依存型」$\Rightarrow$「非依存型」 $S(x) := \sup_{y\in F(x)} f(x,y)$ は次のような最大化問題を考えていることに相当することに注意する。

$$(S_x) \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize}_y & f(x,y) \\ \text{subject to} & y \in F(x) \end{array}$$

この問題の目的関数はパラメータ x に依存しているが、ここで人工的な変数 r を導入して

$$(\tilde{S}_x) \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize}_r & r \\ \text{subject to} & y \in F(x) \\ & r \le f(x,y) \end{array}$$

とすることにより目的関数にはパラメータが入らないようにできる。従って

$$\tilde{F}(x) := \{y \in \mathbf{R} \mid r \le f(x,y), \exists y \in F(x)\}$$

とでもおいてやれば、$S(x) = \sup_{r\in \tilde{F}(x)} r$ という非依存型 max-function として書くことができる。

「非依存型」$\Rightarrow$「依存型」 非依存型 max-function $S_0(x) = \sup_{y\in F(x)} f_0(y)$ を依存型に直すのはやさしい。実際、非依存型はパラメータ変数に関してはコンスタントだと考えれば依存型に含まれる訳だから。それでは面白くないという向きには表示関数

$$\psi_{F(x)}(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \in F(x) \\ +\infty & \text{if } \notin F(x) \end{cases}$$

を用いて $S_0(x) = \sup_{y\in Y} f_0(y) - \psi_{F(x)}(y)$ と書いてやることにより陽にパラメータ変数が表われた形にできる。

そこで当レポートが目的とすることは、依存型と非依存型の max-functions の違いがどのようなところにあるのかを明らかにすることである。次節では依存型の結果（定理 2）が非依存型の結果（定理 3）から導かれることを見る。次に multifunction の上半連続性の点列による特徴付けを通して、ある弱い条件を付すれば非依存型の結果が依存型の結果から導かれることを見る。これによって、依存型と非依存型の違いというものが明らかになる。

2 依存型から非依存型

定理 2で述べたように、依存型の maxfunction $S(x) = \sup_{y \in F(x)} f(x,y)$ が上半連続となるためには、f, Fの上半連続性の他に $F(x_0)$ のコンパクト性を必要としていた。ところが依存型の maxfunction は、前節でみたように非依存型としても書けたのであった。では $F(x_0)$ のコンパクト性が何で必要なのだろうかと言うことになるが、種を明かせば実は非依存型に変換したときに表われた multifunction $\tilde{F}(x)$ の上半連続性を保証する条件となるのである。

命題 1 f, F が上半連続で、$F(x_0)$ がコンパクト集合であれば、*multifunction* $\tilde{F}(x) := \{y \in \mathbf{R} \mid r \leq f(x,y), \exists y \in F(x)\}$ は点 x_0 で上半連続である。

$F(x_0)$ のコンパクト性がないとだめだと言うことを、例1を用いてみてみよう。$f(x,y) = xy$ で、

$$F(x) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{if } x = 0 \\ [0, \frac{1}{x}] & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

なのだから、

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} (-\infty, 0] & \text{if } x = 0 \\ (-\infty, 1] & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

となる。従って$\tilde{F}$ は $x = 0$ で上半連続とならない。

命題の証明は Aubin の依存型関数の証明そのものをなぞるだけなので省略する。この命題と非依存型の定理から依存型の定理が系として得られるのだけれども、こうした変形を用いたアプローチでは問題の難しさを先送りにしただけであることが分かるだろう。そこでより良い理解を得るためにここで multifunction の上半連続性について調べて見ることにする。

3 Multifunction の上半連続性と max-function の上半連続性

Multifunction の上半連続性を、点列によって特徴付けすると非依存型 max-function のからくりがよくわかる。そこでこの節ではまずこの特徴付けから述べる。

補題 1 $F: X \rightrightarrows Y$ が x_0 で上半連続であるとする。この時、$\forall x_n \to x_0, \forall y_n \in F(x_n)$ に対し、$y_n \to y_0$ ならば $y_0 \in \mathrm{cl} F(x_0)$ となる。

証明：$y_0 \notin \mathrm{cl} F(x_0)$ であったとする。点と閉集合の分離を開集合によって行うと、$\exists U_1, U_2$: open with $y_0 \in U_1, \mathrm{cl} F(x_0) \subset U_2$ and $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる。F は上半連続だから十分大きな n に対して、$F(x_n) \subset U_2$ 、すなわち $y_n \in U_2$ が言えるが一方 $y_n \to y_0$ なのだから、やはり

十分大きな n に対して、 $y_n \in U_1$ となり矛盾を引き起こす。□

命題 2 $F: X \rightrightarrows Y$ が x_0 で上半連続であるならば、$\forall x_n \to x_0, \forall y_n \in F(x_n) \setminus F(x_0)$ に対し、$\exists y_0$ *: accumulation point of* $\{y_n\}$ *with* $y_0 \in \mathrm{cl}F(x_0)$ となる。

証明：$x_n \to x_0, y_n \in F(x_n)$ とし、$A = \{y_n\}$ とおく。A が集積点を持つことを示そう。もし、A が集積点を持たなければ、$\forall y \in Y$ に対し、$\exists U(y)$: neighbourhood of y such that $U(y) \cap (A \setminus \{y\}) = \emptyset$、従って特に $y \in Y \setminus A$ に対し、$U(y) \cap A = U(y) \cap (A \setminus \{y\}) = \emptyset$ 即ち、$U(y) \subset Y \setminus A$ が言え $Y \setminus A$ が開集合であることが分かる。さて、この開集合を $U = Y \setminus A$ とおくと、明らかに $F(x_0) \subset U$ であるので F の上半連続性より、十分大きな n に対して $y_n \in F(x_n) \subset U = Y \setminus A$ となり、不合理である。従って A は集積点を持つのだが、この集積点が $\mathrm{cl}F(x_0)$ に属することは前の補題より言える。□

この命題は残念ながら $F: X \rightrightarrows Y$ が上半連続であるための必要十分条件を与えるものではない。実際次のような例がある。

例 2 $F(x_0) = (0,1)$ とし、$x_n \neq x_0$ に対して $F(x_n) = [0,1]$ とおくと $y_n = 1 \in F(x_n) \to 1 \in \mathrm{cl}F(x_0)$ だけれども、$U = (0,1) = F(x_0)$ に対して $F(x_n) \not\subset U$ である。

しかし、$F(x_0)$ が閉集合であることを仮定すると次のことがいえる。

命題 3 （*Bank et al [2]* を見よ）$F(x_0)$ は閉集合であると仮定する。このとき $F: X \rightrightarrows Y$ が x_0 で上半連続であるための必要十分条件は $\forall x_n \to x_0, \forall y_n \in F(x_n) \setminus F(x_0)$ に対し、$\exists y_0$ *: accumulation point of* $\{y_n\}$ *with* $y_0 \in F(x_0)$ となることである。

この命題が言っていることは次のように解釈できる。すなわち、「F が点 x_0 で上半連続であれば、x_0 の近傍では $F(x)$ はある意味ではコンスタントとも言える $F(x_0)$ に含まれる部分と、（殆ど）点列上半連続な部分の二つの部分からできている。」

この特徴付けをもとにすると、少なくとも $F(x_0)$ が閉集合である場合には依存型と非依存型の違いがくっきりと現われてくる。以下でこれを説明する。さて、今調べたように上半連続 multifunction は $F(x_0)$ に含まれる部分とそうでない部分とに分かれるのであった。そこで、新たに二つの multifunction $F_-(x), F_\cap(x): X \rightrightarrows Y$ を次のように定める。

$$F_-(x) := \begin{cases} F(x_0) & \text{if } x = x_0 \\ F(x) \setminus F(x_0) & \text{if } x \neq x_0, \end{cases}$$

$$F_\cap(x) := F(x) \cap F(x_0).$$

勿論 $F(x) = F_-(x) \cup F_\cap(x)$ であるし、$F(x_0)$ が閉集合ならば、$F_-(x)$ の方は x_0 において点列上半連続である。また、max-function S, S_0 は各々、

$$S(x) = \max\{\sup_{y \in F_-(x)} f(x,y), \sup_{y \in F_\cap(x)} f(x,y)\}$$

$$S_0(x) = \max\{\sup_{y \in F_-(x)} f_0(y), \sup_{y \in F_\cap(x)} f_0(y)\}$$

と書けることにも注意しよう。このうち

$$\sup_{y\in F_-(x)} f(x,y) \text{ と } \sup_{y\in F_-(x)} f_0(y)$$

の部分はいずれも定理 1 から上半連続になることが分かる。従って max-function S, S_0 が上半連続になるか否かの鍵を握っているのは

$$\sup_{y\in F_\cap(x)} f(x,y) \text{ と } \sup_{y\in F_\cap(x)} f_0(y)$$

の部分なのだが、非依存型だと

$$\sup_{y\in F_\cap(x)} f_0(y) \le \sup_{y\in F(x_0)} f_0(y) = \sup_{y\in F_\cap(x_0)} f_0(y)$$

なのでこの部分がいつも上半連続となる。一方依存型だと関数 $x \to \sup_{y\in F(x_0)} f(x,y)$ が必ずしも上半連続にはならないのだ。これが依存型と非依存型の大きな違いである。逆にこのことから次の定理が導かれる。

定理 4 F は点 x_0 で上半連続で、$F(x_0)$ は閉集合であるとし、$f(x,y)$ は上半連続であるとする。この時関数 $x \to \sup_{y\in F(x_0)} f(x,y)$ が上半連続ならば $S(x)$ は点 x_0 で上半連続である。

註 2 $F(x_0)$ がコンパクト集合であれば関数 $x \to \sup_{y\in F(x_0)} f(x,y)$ は上半連続になるわけだから上記定理は定理 *2*を含む。

さて、この定理 4の逆、即ち「S が x_0 で上半連続であれば、関数 $x \to \sup_{y\in F(x_0)} f(x,y)$ が上半連続」が成立すれば数学的にちょいと面白いのだが次のような例があるのでそうそうはうまくいかない。

例 3 $X = \mathbf{R}_+, Y = \mathbf{R}, f(x,y) = xy$ とし、

$$F(x) = \begin{cases} [0,\infty) & \text{if } x = 0 \\ \{x\} & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

とおく。このとき f, F はともに上半連続であり、$F(x_0)$ は閉集合さらに $S(x) = x^2$ なので連続である。しかし

$$\sup_{y\in F(0)} f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ +\infty & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

となってこれは $x = 0$ において上半連続とはならない。

付記：この研究は平成 8 年度文部省科学研究費基盤研究 (C)08680456 によるものである。

参考文献

1. Aubin J.-P. , (1987) *Excersices d'Analyse non linéaire*, Masson

2. Bank B., Guddat J., Klatte D, Kummer B and Tammer K., (1983) *Non-linear Parametric Optimization*, Birkhäuser

3. 福島雅夫, (1986). 「非線形最適化の理論」、産業図書