非線形計画問題の感度分析とノンスムース・アナリシス[*]
Sensitivity Analysis of Nonlinear Programming Problems and Nonsmooth Analysis

白石俊輔[†]
SHIRAISHI Shunsuke
富山大学・経済学部
Faculty of Economics, Toyama University

Abstract We explain the role of nonsmooth analysis in the context of sensitivity analysis of parametrized nonlinear programming problems. Our development is largely based on the article of Penot [33]. Si vous êtes francophone, je vous conseille le voir.

1 はじめに

非線形計画問題の感度分析で対象とするのは、パラメータ w を含む最適化問題

$$\operatorname*{Minimize}_{x} \quad f(w,x) : x \in F(w),$$

であり、特に最適値関数（performance function, optimal-value function）

$$p(w) := \inf_{x\in F(w)} f(w,x)$$

がいの一番に解析のターゲットとなる。上では実行可能解の集合を抽象的な set-valued map(multifunction) $F(w)$ として書いたが実際には

$$(\mathcal{P}_w) \qquad \operatorname*{Minimize}_{x} \quad f(w,x) : g(w,x) \in C,$$

と具体的に書かれたものが対象になる。あるいはつぎのような simple peuturbation problem

$$(\mathcal{S}_w) \qquad \operatorname*{Minimize}_{x} \quad f(x) : g_i(x) + w_i \leq 0, i = 1,\ldots,m$$

の形をとることもある。

この最適値関数は何といってもノンスムース・アナリシス (nonsmooth analysis) の最も良い具体例であろう。そのノンスムース・アナリシスあるいは Rockafellar-Wets [34] 言うところの variational analysis での main tool は方向微分 $p^?(w,u)$ と subdifferential $\partial^? p$ である。本稿では、$p^?(w,u)$ や $\partial^? p$ を通じて何をしろうとしているのか、あるいはこれらが感度分析で果たしている役割は何なのかを解説したい。したがって、感度解析の main stream [2, 5, 12, 13, 44, 45] とはかなり違った観点からこの問題を眺めることになる。

現在、Nonsmooth analysis の範疇に入る論文は、2000 をこえる文献があるそうで[1]、方向微分 や subdifferential についても様々なものが提案されている。代表的なものをいくつかあげてみよう。
[方向微分]

- lower radial derivative (lower Dini derivative)

$$p'_{-}(w,u) := \liminf_{t\to 0_+} \frac{1}{t}(p(w+tu) \Leftrightarrow p(w))$$

[*]本研究は、科学研究費基盤 (B) No.11440033 より一部補助を受けている。
[†]shira@eco.toyama-u.ac.jp
[1]http://www.jams.or.jp/news/kaiho-03.html

- upper radial derivative (upper Dini derivative)

$$p'_+(w,u) := \limsup_{t\to 0_+} \frac{1}{t}(p(w+tu) \Leftrightarrow p(w))$$

- lower epi-derivative (contingent derivative, lower Hadamard derivative)

$$p^{!}(w,u) := \liminf_{t\to 0_+, v\to u} \frac{1}{t}(p(w+tv) \Leftrightarrow p(w))$$

- upper epi-derivative (incident derivative)

$$\begin{aligned} p^{i}(w,u) &:= \limsup_{t\to 0_+} \inf_{v\to u} \frac{1}{t}(p(w+tv) \Leftrightarrow p(w)) \\ &:= \sup_{V\in\mathcal{V}(u)} \limsup_{t\to 0_+} \inf_{v\in V} \frac{1}{t}(p(w+tv) \Leftrightarrow p(w)) \end{aligned}$$

- Clarke's derivative

$$p^{\circ}(w,u) := \limsup_{t\to 0_+, w'\to w} \frac{1}{t}(p(w'+tu) \Leftrightarrow p(w'))$$

[Subdifferential]

- Fréchet subdifferential

$$w^* \in \partial^- p(w) \Leftrightarrow p(w+u) \geq p(w) + \langle w^*, u\rangle + o(u)||u|| \quad \text{with} \lim_{u\to 0} o(u) = 0$$

- contingent subdifferential

$$\begin{aligned} w^* \in \partial^{!} p(w) &\Leftrightarrow p^{!}(w,u) \geq \langle w^*, u\rangle \quad \text{for each} \quad u \in W \\ &\Leftrightarrow p(w+tv) \geq p(w) + \langle w^*, tv\rangle + o(t,v)t \quad \text{with} \lim_{t\to 0_+, v\to u} o(t,v) = 0 \end{aligned}$$

- incident subdifferential

$$w^* \in \partial^{i} p(w) \Leftrightarrow p^{i}(w,u) \geq \langle w^*, u\rangle \quad \text{for each} \quad u \in W$$

- Clarke's subdifferential

$$w^* \in \partial^{\circ} p(w) \Leftrightarrow p^{\circ}(w,u) \geq \langle w^*, u\rangle \quad \text{for each} \quad u \in W$$

これらはすべて p が凸関数の場合の片側方向微分 $p'(w,u)$ と劣微分 ∂p をモデルとしていることがわかる：

$$p'(w,u) := \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{t}(p(w+tu) \Leftrightarrow p(w))$$

$$\begin{aligned} w^* \in \partial p(w) &\Leftrightarrow p'(w,u) \geq \langle w^*, u\rangle \quad \text{for each} \quad u \in W \\ &\Leftrightarrow p(w+tv) \geq p(w) + \langle w^*, tu\rangle \end{aligned}$$

この他にも例えば方向微分として次の Michel-Penot derivative[27] のような非常に複雑な式で定義されるようなものもある：

$$p^{\diamond}(w,u) := \sup_{\substack{v\in W \\ r\in R}} \sup_{V\in\mathcal{V}(u)} \limsup_{\substack{(v',s,t)\to(v,r,0_+) \\ p(w)+ts\geq p(w+tv')}} \inf_{u'\in V} \frac{1}{t}(p(w+tu'+tv') \Leftrightarrow p(w) \Leftrightarrow ts)$$

このような定義式をみて、非常にスリリングに感じる向きもあろうが、大方には「なんの事だろう？」というのが正直なところだろう。しかし、これらが微分不可能最適化問題を取り扱うために準備されたものだということ、そしてそのプロトタイプが微分不可能凸最小化であるということを考えると、どの subdifferential を扱うにしろ次のような条件が成り立っていることが要求されるだろう。[30]

Axioms for a subdifferential $\partial^?$
(S_1) f と g が点 x のある近傍で一致していれば$\partial^? f(x) = \partial^? g(x)$；
(S_2) f が凸関数であれば$\partial^? f(x) = \partial f(x)$；
(S_3) f が点 x で局所最小であれば $0 \in \partial^? f(x)$；
(S_4) 任意の f と線形関数 h に対して$\partial^? (f+h)(x) = \partial^? f(x) + h$；

感度分析にあたってはこれら以外の性質を subdifferential に要求したり、方向微分と subdifferential の双対関係：

$$\partial^? p(w) = \{w^* | p^?(w,u) \geq \langle w^*, u\rangle \quad \text{for each} \quad u \in W\}$$

を利用したりする必要がある。次節以降ではこれらの点に着目しながら、得られる結果を解説する。

2 Elementary Results

Elementary, my dear[2].

制約付最適化問題を制約のない最適化問題に変換しようという取り組みは自然な考え方である。こうした方法には、ペナルティ法をはじめとしていろいろな方法があるが、理論面からみた場合、indicator function を用いるやりかたが良い[3]。集合 S の indicator function δ_S は次式で定義される関数である：

$$\delta_S(x) = 0 \quad \text{if} \quad x \in S, \qquad \delta_S(x) = +\infty \quad \text{if} \quad x \notin S.$$

また nonsmooth analysis では indicator function と subdifferential を用いて、S の x における normal cone が $N(S,x) := \partial^? \delta_S(x)$ で定義される。ここで $F := \{(w,x) \in W \times X | x \in F(w)\}$ とおき、$P(w,x) := f(w,x) + \delta_F(w,x)$ とおくことにより：

$$p(w) = \inf_{x \in X} P(w,x)$$

という制約無しの問題に変換される。この方法は特に凸計画問題（i.e. P が凸関数になる場合）の感度解析に威力を発揮するが[4]、非凸の場合にも $\partial^?$ の性質によっては同様にうまくいく。今、ここで

$$S(w) := \{x \in X | p(w) = P(w,x)\} = \{x \in F(w) | p(w) = f(w,x)\}$$

を解集合とする。$Q(w,x) := p(w)$ とおくと $Q \leq P$ で $Q(w,x) = P(w,x)$ だから凸に対する ∂ だったら $\partial p(w) \times \{0\} = \partial Q(w,x) \subset \partial P(w,x)$ と成っている。これが $\partial^?$ についても同様に成り立つためには、次のような性質があればよいことが分かる。

Definition 1 (Penot[30]) *subdifferential* $\partial^?$ は各々

- $f(x,y) = g(x)$ ならば$\partial^? f(x,y) = \partial^? g(x) \times \{0\}$ を満たすとき *reduicible*
- $f \leq g$ かつ $f(x) = g(x)$ ならば$\partial^? f(x) \subset \partial^? g(x)$ を満たすとき *homotone*

と言う。

Proposition 2 *subdifferential* $\partial^?$ が *reduicible* かつ *homotone* であるとする。このとき、$x \in S(w)$ に対し、

$$\partial^? p(w) \times \{0\} \subset \partial^? P(w,x)$$

が成り立つ。

[2] ワトソン君はホームズ先生にいつもこういわれますね
[3] Rockafellar-Wets [34, Chapter 1, Commentary] によると、このアイデアは 60 年代初頭に Moreau と Rockafellar が独立に提唱したそうである
[4] 問題はやや特殊だが、[17, 38] でこのやり方が分かる

P の具体的な関数形 $P(w,x) = f(w,x) + \delta_F(w,x)$ から、$\partial^?$ にさらに

- f : smooth ならば$\partial^?(f+g)(x) = f'(x) + \partial^? g(x)$ を満たす[5]

という性質が備わっていれば、$\partial^? P(w,x) = f'(w,x) + \partial^? \delta_F(w,x) = f'(w,x) + N(F,(w,x))$ と書けることが分かる。従って、$N(F,(w,x))$ の正体がはっきりすれば $\partial^? p(w)$ が分かることになる。そこで、$N(F,(w,x)) = \partial^! \delta_F(w,x)$ のときに、これがどのように表されるか見てみよう。このとき $N(F,(w,x)) = (T(F,(w,x)))^\circ$ が成立する。ただし、$T(S,x) := \limsup_{t\to 0_+} t^{-1}(S \Leftrightarrow x)$[6] は tangent cone で、$S^\circ := \{x^* | \langle x^*, x\rangle \ \le 0, \forall x \in S\}$ で polar cone を表す。制約式 $g(w,x) \in C$ の linearizing cone

$$C((w,x)) := \{(u,v) | g'(w,x)(u,v) \in T(C, g(w,x))\}$$

を用いて $T(F,(w,x)) = C((w,x))$ と書ければ、関係式 $N(F,(w,x)) = (T(F,(w,x)))^\circ$ から normal cone が具体的に書けそうである。そこで、今特に simple purturbation problem $(\mathcal{S}_w)$ を考えてみよう。そうすると $g_i(w,x) = g(x) + w$ だから $g_i'(w,x)(u,v) = g_i'(x)(v) + u$ となる。$i \in I(w,x) := \{i | g_i(w,x) = 0\}$ に対して u' を適当にとれば $g_i'(w,x)(u',0) < 0$ となる。従って、$g_i'(w,x)(u,v) \le 0, i \in I(w,x)$ なる (u,v) を取ると、$t_n \to 0_+$ に対して $g_i(w + t_n(u + t_n u'), x + t_n v) \le 0, \forall i$ が言え、$(u + t_n u', v) \to (u,v)$ より $(u,v) \in T(F,(w,x))$ となる。従って

$$C((w,x)) = \{(u,v) | g'(x)(v) + u \le 0, i \in I(w,x)\} \subset T(F,(w,x))$$

が言えるが逆の包含関係は明らかなので、結局等号が成立する。$\{x | \langle a_1, x\rangle \ \le 0, i = 1, \dots, l\}^\circ = \{x^* | x^* = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i, \lambda_i \ge 0\}$ を使えば、p の subdifferential と $(\mathcal{S}_0)$ の Lagrange 乗数の集合：

$$M(x) := \{\lambda \ge 0 | \langle \lambda, g(x)\rangle = 0, f'(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(x) = 0\}$$

との関係を述べた次の結果が得られる。

Theorem 3 $x \in S(0)$ に対し、

$$\partial^! p(0) \subset M(x)$$

この定理では問題が $(\mathcal{S}_w)$ だからうまくいっていることには注意してほしい。一般的な問題 $(\mathcal{P}_w)$ に対しては $T(F,(w,x))$ あるいは $N(F,(w,x))$ がうまく線形近似されるように、いわゆる制約想定[7]を仮定する必要がある。大雑把にいえば、subdifferential $\partial^?$ については $N(F,(w,x))$ が方向微分 $p^?(w,u)$ については $T(F,(w,x))$[8]が線形近似されていれば良い。次の条件を Gould-Tolle の制約想定という：

$$(GT) \qquad\qquad N(F,(w,x)) = g'(w,x)^T \left(N(C, g(w,x))\right)$$

また次の条件を線形化可能条件という：

$$(L) \qquad T(F,(w,x)) = C((w,x)).$$

命題 2 より、$w^* \in \partial^? p(w)$ に対し $(w^*, 0) \in \partial^? P(w,x) = f'(w,x) + N(F,(w,x))$ だから、(GT) 条件があれば $\exists \lambda \in N(C, g(w,x)$

$$w^* = D_W f(w,x) + \lambda \circ D_W g(w,x), \qquad 0 = D_X f(w,x) + \lambda \circ D_X g(w,x)$$

となる。従って

$$L(w,x,\lambda) := f(w,x) + \langle \lambda, g(w,x)\rangle, \qquad M(w,x) := \{\lambda \in N(C, g(w,x)) | D_X L(w,x,\lambda) = 0\}$$

としたとき次が得られる。

---

[5]このとき $\partial^?$ は compatible と言う

[6]Kuratowski-Panlevé limit [34, Chapter 4 B]

[7]制約想定が最適化理論で演じる役割にはいろいろな解釈があるが、ここで言うように feasible reagion が線形近似可能であることを保証するものと捉えるのは近年のトレンドである。

[8]実際は $T(F,(w,x))$ は $p^?(w,u)$ に“ うまく ”適合した tangent set でなければならない。

Theorem 4 $\partial^?$ が *reduicible, homotone* かつ *compatible* であるとする。$x \in S(w)$ に対し (GT) 条件が満たされていれば、

$$\partial^? p(w) \subset \{D_W L(w,x,\lambda) | \lambda \in M(w,x)\}. \tag{1}$$

一方 $(u,v) \in T(F,(w,x))$ とすると、$t_n \to 0_+$ に対し、$\exists (u_n, v_n) \to (u,v)$ with $x + t_n v_n \in F(w + t_n u_n)$ なので、$p(w + t_n u_n) \leq f(w + t_n u_n, x + t_n v_n)$ となる。$x \in S(w)$ に対し、$p(w) = f(w,x)$ なので $p^!(w,u) \leq f'(w,x)(u,v)$ が分かる。従って線形化可能条件 (L) とあわせると次が得られる。

Proposition 5 $x \in S(w)$ に対し線形化可能条件 (L) が満たされていれば、

$$p^!(w,u) \leq \inf\{f'(w,x)(u,v) | g'(w,x)(u,v) \in T(C, g(w,x))\}. \tag{2}$$

3 Duality

前節で説明した (1) 式や (2) 式で「等号がなりたてばなあ」と考えるのが人情というものであろう。そこで (2) 式の右辺に注目してみる。これは次のような最大化問題である：

$$(PL) \qquad \underset{v}{\text{Minimize}} \quad f'(w,x)(u,v) : g'(w,x)(u,v) \in T(C, g(w,x)).$$

$T(C, g(w,x))^\circ = N(C, g(w,x))$ に気をつければ、この問題の（Lagrange）双対問題は次のようになる：

$$(DL) \qquad \underset{\lambda}{\text{Maximize}} \quad D_W L(w,x,\lambda)(u) : \lambda \in M(w,x).$$

もしここで、双対性 $\inf(PL) = \sup(DL)$ が成立しているとしよう。このとき、

$$p^!(w,u) \geq \inf\{f'(w,x)(u,v) | g'(w,x)(u,v) \in T(C, g(w,x))\}, \tag{3}$$

または

$$p^!(w,u) \geq \sup\{D_W L(w,x,\lambda)(u) | \lambda \in M(w,x)\}, \tag{4}$$

であることが確認されれば、一気に (1) 式と (2) 式で等号が成り立つことが言える。(4) 式を保証するのが次の Lempio-Maurer の条件である：

$$(LM)_u \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \limsup_{t \to 0_+, v \to u} \frac{1}{t} d(x, S(t\varepsilon, w + tv)) < \infty,$$

ただし、$x \in S(w)$, $S(\varepsilon, w) := \{x \in F(w) | f(w,x) \leq p(w) + \varepsilon\}$ （近似解集合）である。

Proposition 6 ある $x \in S(w)$ に対し $(LM)_u$ が成立していれば

$$p^!(w,u) \geq \sup\{D_W L(w,x,\lambda)(u) | \lambda \in M(w,x)\}$$

が成立する。

一方、(PL) との関係でいえば、$(LM)_u$ だけで分かるのは次の評価式：

$$p^!(w,u) \geq \inf\{f'(w,x)(u,v) | (u,v) \in T(F,(w,x))\}$$

までであるが、線形化可能条件 (L) があれば[9]、$\inf(PL)$ との評価式：

$$p^!(w,u) \geq \inf\{f'(w,x)(u,v) | g'(w,x)(u,v) \in T(C, g(w,x))\}$$

が成立する。

一般には以上にあげたような条件がすべてうまくいっていることはなく、例えば次のような評価式が得られている。[15, 26]（いろいろ書いても煩雑なので、定理の前提条件は省略する）

$$\begin{aligned}\inf_{x \in S(w)} \inf_{\lambda \in M(w,x)} D_W L(w,x,\lambda)(u) \quad &\leq \quad p'_-(w,u) \\ \leq p'_+(w,u) \quad &\leq \quad \inf_{x \in S(w)} \sup_{\lambda \in M(w,x)} D_W L(w,x,\lambda)(u).\end{aligned} \tag{5}$$

[9] いわゆる制約想定は双対性や線形化可能条件を一気に保証してしまう。

次にあげる Gauvin-Tolle の例 [15] は (5) 式や定理 3 で等号が成立しない例である。（詳しくは [5, 30] 参照）

$$\operatorname*{Minimize}_{x} \quad \Leftrightarrow x_2 : {x_1}^2 + x_2 + w_1 \leq 0, \Leftrightarrow {x_1}^2 + x_2 + w_2 \leq 0.$$

尚、凸計画問題の場合、すなわち $L(w, \cdot, \lambda)$ が凸関数になる場合は、 $\inf(PL) = \sup(DL)$ よりもう一段前の双対性：

$$\inf_x \sup_\lambda L(w, x, \lambda) = \sup_\lambda \inf_x L(w, x, \lambda),$$

が成立することが分かり、次のような公式が得られる [8, 20, 41]：

$$p'(w, u) = \inf_{x \in S(w)} \sup_{\lambda \in M(w,x)} D_W L(w, x, \lambda)(u).$$

4 Danskin 公式

この節では特に feasible reagin が constant である場合、即ち $F(w) \equiv C$ を扱う：

$$p(w) := \inf_{x \in C} f(w, x).$$

$p'(w, u)$ を f の微分で表す Danskin 公式 [9]：

$$p'(w, u) = \inf_{x \in S(w)} D_W f(w, x)(u),$$

は nonsmooth analysis の原点であると言ってよいだろう。さて、これまでの節では f は暗に smooth であることを仮定してきたが、ここにいたってやっと nonsmooth analysis らしく、微分不可能な f に対して Danskin 公式を導く procedure を概観する。簡単のため関数 $f(w, x)$ は連続であり、C はコンパクトであるとする。また $f_x(\cdot) := f(\cdot, x)$ と書くことにする。$x \in S(w)$ に対して、$p(w) = f_x(w), p(w+tv) \leq f_x(w+tv)$ であることに注意すれば直ちに次の評価式が得られる：

$$p^!(w, u) \leq \inf_{x \in S(w)} f_x^!(w, u). \tag{6}$$

(6) 式の逆を保証するにはどのように考えたらよいであろうか？そこで今関数 $q : R_+ \times W \times C \to \overline{R}$ を次式で定める：

$$q(t, v, x) := \begin{cases} t^{-1}(f(w + tv, x) \Leftrightarrow f(w, x)) & \text{if } t \neq 0 \\ f_x^!(w, v) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

この q を使って

$$\bar{q}(t, v) := \inf_{x \in S(w+tv)} q(t, v, x)$$

と置くと、$\bar{q}(0, u) = \inf_{x \in S(w)} f_x^!(w, u)$ で

$$p^!(w, u) = \liminf_{t \to 0_+, v \to u} \frac{1}{t}(p(w + tv) \Leftrightarrow p(w)) \geq \liminf_{t \to 0_+, v \to u} \bar{q}(t, v)$$

であるから、$\bar{q}(t, v)$ が $(0_+, u)$ で下半連続であることが保証されていればよいと言うことが分かる。C がコンパクトであるときは、いわゆる安定性の理論から $S(w)$ の挙動が良いことがわかり、結局 $q(t, v, x)$ が下半連続でさえあれば良いことが言える。この条件は次のようにも言い換えることができる：

Lemma 7 $q(t, v, x)$ が $\{0_+\} \times \{u\} \times S(w)$ で下半連続になることと、

$$(H_x) \qquad f_x^!(w, v) = \liminf_{(t,v,x') \to (0_+, u, x)} \frac{1}{t}(f(w + tv, x') \Leftrightarrow f(w, x'))$$

がすべての $x \in S(w)$ に対して成立することは等価である。

まとめると、次の結果が得られる：

Theorem 8 $f(w, x)$ は連続であり、C はコンパクトであるとする。(H_x) がすべての $x \in S(w)$ について成立しているならば、*Danskin* 公式が成立する：

$$p^!(w, u) = \inf_{x \in S(w)} f_x^!(w, u).$$

5　おわりに

最初にきちんと述べていなかったので、ここで目的関数や制約式についてきちんとまとめておく。$f : W \times X \to I\!R$, $g : W \times X \to Z$ は 4 節以外では十分に smooth な関数である。$F : W \rightrightarrows X$ は multifunction である。ここで W, X, Z は Banach 空間であり、$C \subset Z$ は convex cone である。

最後にわざとふれてこなかった[10]ことについて少しだけ言及したい。

1. 感度分析では 2 次の十分条件が非常に重要な役割をはたす。
2. 制約想定のはたす役割も大きい。
3. 解の挙動をきちんと分析しなければならない。
4. いろいろな分野への応用。

1 については最初に main stream としてあげた文献を参照していただきたい。ひとつだけ申し添えるなら、非線形計画問題の 2 次の最適性条件は川崎 [22] をブレークスルーとして大きな進展があったが、この成果は感度分析にはまだ十分には反影されていないようである。すなわち、制約式 $g(w,x) \in C$ は C の形態によっては“ 必ず ”包絡線効果を示す [25] ことが考慮されているとは言えない[11]。

２の制約想定は 2 節で述べたように「feasible reagion が線形近似可能であることを保証する」条件と考えることができる。この意味での制約想定として最も popular なのは Robinson の条件であろう：

$$(R) \qquad\qquad g'(w,x)(W \times X) \Leftrightarrow I\!R_+(C \Leftrightarrow g(w,x)) = Z.$$

いまでは線形近似を保証するのには metric regular という考え方を使うのが普通である：

$$(MR)\begin{cases} \exists c > 0,\ r > 0 & \text{such that} \\ d((w',x'), g^{-1}(C)) \le cd(g(w',x'), C) & \text{for all} \qquad (w',x') \in B((w,x),r). \end{cases}$$

ここで、$d(\cdot, C)$ は距離関数である。尤も Robinson の条件はこの他にも例えば 3 節で述べた双対性 $\inf(PL) = \sup(DL)$ を保証したりと感度分析では獅子奮迅の活躍である。詳しくは Bonnans-Shapiro [5], Penot [32, 33] を参照。

3 はいわゆる安定性（あるいは微分安定性）と呼ばれる範疇にはいる。最近では well-posedness という考え方とも深い関わりがある。[3, 11]

4 の応用については、ざっと調べただけ[12]でも次のようなものがあげられる：

- 半正定値計画 [36]
- 最良近似 [14, 23, 24]
- 最大固有値 [19]
- Shape optimization [10]

References

[1] Bank, B., Guddat, J., Klatte, D., Kummer, B., and Tammer, K.: *Non-linear parametric optimization*, Birkhäuser, Basel,Boston,Stuttgart, (1983).

[2] Bednarczuk, E.: Sensitivity in mathematical programming: a review, *Control and Cybernetics*, **23** (1994) 589–604.

[3] Bednarczuk, E. and Penot, J.-P.: On the positions of the notions of well-posed minimization problems, *Bollettino U.M.I.*, **6-B** (1992) 665–683.

[10] もちろん勉強不足だからふれられなかったのであります。
[11] 正確にいうと包絡線効果が現れないような仮定を C に置いている。([30])
[12] ほんとうに、しらべただけ。

[4] Bonnans, J.F. and Cominetti, R.: Perturbed optimization in Banach spaces I: A general theory based on a weak directional constrained qualification;II: A theory based on a strong directional qualification;III: Semi-infinite optimization, *SIAM J. Control and Optim.*, **34** (1996) 1151–1171,1172–1189, and 1555–1567.

[5] Bonnans, J.F. and Shapiro, A.: Optimization problems with perturbations: A guided tour, *SIAM Rev.*, **40** (1998) 228–264.

[6] Clarke, F.H.: Generalized gradients and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205** (1975) 247–262.

[7] Cominetti, R. and Correa, R.: A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization, *SIAM J. Control and Optim.*, **28** (1990) 789–809.

[8] Correa, R. and Seeger, A.: Directional derivative of a minimax function, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **9** (1985) 13–22.

[9] Danskin, J.M.: *The Theory of Max-Min and its Applications to Weapons Allocations Problems*, Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[10] Delfour, M.C. and Zolésio, J.-P.: Shape sensitivity analysis via min max differentiability, *SIAM J. Control and Optim.*, **26** (1988) 834–862.

[11] Dontchev, A.L. and Zolezzi, T.: *Well-Posed Optimization Problems*, Springer-Verlag, Berlin, (1993).

[12] Fiacco, A.V.: *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*, Academic Press, New York, (1983).

[13] Fiacco, A.V. and Ishizuka, Y.: Sensitivity and Stability Analysis for Nonlinear Programming, *Annals Oper. Res.*, **27** (1990) 215–236.

[14] Furukawa, N.: Optimality conditions in nondifferentiable programming and their applications to best approximations, *Appl. Math. Optim.*, **9** (1983) 337–371.

[15] Gauvin, J. and Tolle, J.W.: Differential stability in nonlinear programming, *SIAM J. Control and Optim.*, **15** (1977) 294–311.

[16] Hiriart-Urruty, J.-B.: Gradients généralisés de fonctions marginales, *SIAM J. Control and Optim.*, **16** (1978) 310–316.

[17] Hiriart-Urruty, J.-B.: Approximate first-order and second-order directional derivatives of a marginal function in convex optimization, *J.O.T.A.*, **48** (1986) 127–140.

[18] Hiriart-Urruty, J.-B.: *L'optimisation*, Que sais-je? 3184, Presses Universitaire de France, Paris, (1996).

[19] Hiriart-Urruty, J.-B. and Lewis, A.S.: The Clarke and Michel-Penot subdifferentials of the eigenvalues of a symmetric matrix, *Comp. Optim. Appl.*, **13** (1999) 13–23.

[20] Hogan, W.W.: Directional derivatives for extremal-value functions with applications to the completely convex case, *Oper. Res.*, **21** (1973) 188–209.

[21] Jofre, A. and Penot, J.-P.: A note on the directional derivative of a marginal function, *Rev. Mat. Apl.*, **14** (1993) 37–54.

[22] Kawasaki, H.: An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second order necessary conditions for minimization problems, *Math. Programming*, **41** (1988) 73–96.

[23] 川崎英文: 最適化と最良近似, 数学, **46** (1994) 112–123.

[24] 川崎英文: 微分不可能最適化と最良近似, 第 7 回 *RAMP* シンポジウム論文集, (1995) 137–151.

[25] Kawasaki, H.: First- and second-order directional derivatives of a max-type function induced from an inequality state constraint, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **29** (1997) 41–49.

[26] Lempio, F. and Maurer, H.: Differential stability in infinite-dimensional nonlinear programming, *Appl. Math. Optim.*, **6** (1980) 139–152.

[27] Michel, Ph. and Penot, J.-P.: Calcul sous-diférential pour des fonctions lipschitziennes et non lipschitiziennes, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, **298** (1984) 269–272.

[28] Penot, J.-P.: Continuity properties of performance functions, in *Optimization, theory and algorithms*, Edited by Hiriart-Urruty J.-B., Oettli W. and Stoer J., Dekker (1983) 77–90.

[29] Penot, J.-P.: Differentiability of relations and differential stability of perturbed optimization problems, *SIAM J. Control and Optim.* , **22** (1984) 529–551.

[30] Penot, J.-P.: Generalized derivatives of a performance function and multipliers in mathematical programming, in *Proceedings Intern. Conf. on Parametric Optimization IV, Enschede (NL)*, Edited by J. Guddat, H. Th. Jongen, F. Nozicka, G. Still, F. Twilt, P. Lang, Berlin (1996) 281-298.

[31] Penot, J.-P.: Multipliers and generalized derivatives of performance functions, *J.O.T.A.*, **93** (1997) 609–618.

[32] Penot, J.-P.: Central and peripheral results in the study of marginal and performance functions, in *Mathematical programming with data perturbations*, Edited by Fiacco A.V., Marcel Dekker (1998) 305–337.

[33] Penot, J.-P.: Points de vue sur l'analyse sensibilié en programmation mathématique, in *Actes des sixièmes journées Poitiers du groupe MODE* , (1999).

[34] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.-B.: *Variational analysis*, Springer, Berlin, (1998).

[35] Seeger, A.: Second order directional derivatives in parametric optimization problems, *Math. Oper. Res.*, **13** (1988) 124–139.

[36] Shapiro, A.: optimality conditions and sensitivity analysis of cone-constrained and semi-definite programs, in *Topics in semidefinite and interior-point methods*, Edited by Pardalos P.M. and Wolkowicz H., A.M.S. (1998) 1–15.

[37] Shiraishi, S.: First-order and second-order ε-directional derivatives of a marginal function in convex programming with linear inequality constraints, *J.O.T.A.*, **66** (1990) 489–502.

[38] Shiraishi, S.: ε-directional derivative of a marginal function in parametrized convex programming, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **24** (1991) 177–183.

[39] Shiraishi, S.: A note on directional differentiability of max-functions, THE FUDAI KEIZAI RONSHU, **38** (1993) 149–157.

[40] Shiraishi, S.: Directional differentiability of max-functions and its applications to convex functions, in *Proceedings of APORS'94*, Edited by Fushimi M. and Tone K., World Scientific, Singapore (1995) 477–483.

[41] Shiraishi, S.: Sensitivity analysis of nonlinear programming problems via minimax-functions, in *Mathematical programming with data perturbations*, Edited by Fiacco A.V., Marcel Dekker (1998) 387–397.

[42] Shiraishi, S.: Upper semi-continuity and directional derivatives of marginal functions, *Faculty of Economics, Toyama University, Working Paper No.176*,(1998).

[43] 白石俊輔: Danskin 公式における maximand の正則性について, 京都大学数理解析研究所研究集会「最適化のための連続と離散数理」,(1999).

[44] 谷野哲三: 非線形計画法の安定性理論, システムと制御, **24** (1980) 605–612.

[45] 谷野哲三: 非線形最適化における感度分析, 第2回 *RAMP* シンポジウム論文集, (1990) 141–150.